2 Определение вероятности. Статистическое определение вероятности. Геометрическая вероятность

Определение. *Вероятностью P(A) события в данном опыте называется отношение числа m исходов опыта, благоприятствующих событию A, к общему числу n возможных исходов опыта, образующих полную группу равновероятных попарно несовместных событий:*

$$P(A) = \frac{m}{n} \qquad (7)$$

Это определение вероятности часто называют *классическим*.

Пример. На завод привезли партию из 1000 подшипников. Случайно в эту партию попало 30 подшипников, не удовлетворяющих стандарту. Определить вероятность P(A) того, что взятый наудачу подшипник окажется стандартным.

Решение. Число стандартных подшипников равно *1000-30=970*. Будем считать, что каждый подшипник имеет одинаковую вероятность быть выбранным. Тогда полная группа событий состоит из *n=1000* равновероятных исходов, из которых событию *A* благоприятствуют *m=970* исходов. Поэтому *P(A)=m/n=970/1000=0.97*.

При оценке вероятности событий, основанной на том, насколько ***часто*** будет проявляться данное событие в ***произведённых*** испытаниях, используется статистическое определение вероятности.

Статистической вероятностью события *A* называется относительная частота (частость) появления этого события в произведённых испытаниях, т.е.:

$$P^*(A) = W(A) = \frac{M}{N}, \qquad (8)$$

где $P^*(A)$ – статистическая вероятность события *A*;
$W(A)$ – относительная частота (частость) события *A*;
M – число испытаний, в которых появилось событие *A*;
N – общее число испытаний.

В отличие от вероятности $P(A)$, рассматриваемой в классическом определении, статистическая вероятность $P^*(A)$ является характеристикой ***опытной, экспериментальной.*** Если $P(A)$ есть доля случаев, благоприятствующих событию *A*, которая определяется непосредственно, без каких-либо испытаний, то $P^*(A)$ есть доля тех ***фактически произведённых испытаний,*** в которых событие *A* появилось.

Пример. Наблюдения показывают, что в среднем среди 1000 новорожденных детей 515 мальчиков. Какова частота рождения мальчиков?

Решение. Пусть событие *A* – «рождение мальчика». Общее число испытаний в данной задаче *n*=1000, число *m* появлений события *A* равно 515.

Частота появления события А: $P^*(A)=\frac{m}{n}=\frac{515}{1000}=0,515$

Геометрическая вероятность

Пусть на плоскости имеется некоторая область *D*, площадь которой S_D, и в ней содержится другая область *d*, площадь которой S_d (рисунок 1). В область *D*наудачу бросается точка.

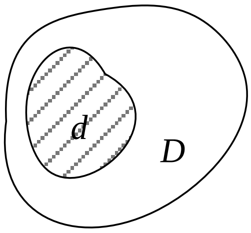

Рисунок 1

При этом предполагается, что наудачу брошенная точка может попасть в любую точку области и вероятность попадания в какую-либо часть области *D*не зависит от её расположения и формы.

Это значит, что пространство Ω содержит несчетное множество равновозможных элементарных событий ω и область *D* является геометрическим образом пространства Ω. Тогда $P(A)=\frac{S_d}{S_D}$ равна отношению площади области *d*, занятой благоприятствующими положениями точки попадания к площади области *D*.

Геометрической вероятностью события А называется отношение меры области (длины, площади, объёма) благоприятствующей появлению события *А*, к мере всей области, т.е.

$$P(A)=\frac{mes\ d}{mes\ D}, \tag{9}$$

где mes – мера (длина, площадь, объём).

Задачи для самостоятельного решения

1. Бросают 2 игральные кости. Какова вероятность того, что сумма очков на выпавших гранях равна 5?
2. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 кубиков одинакового размера. Полученные кубики тщательно перемешены. Какова вероятность того, что кубик, извлеченный наудачу, будет иметь 2 окрашенные стороны.
3. Из 60 вопросов, входящих в экзаменационные билеты, студент подготовил 50. Какова вероятность того, что вытянутый студентом билет, содержащий 2 теоретических вопроса, будет состоять из подготовленных им вопросов?
4. Английский математик Карл Пирсон (1857-1936) бросал монету 24000 раз, причем герб выпал 12012 раз. Какова частота появления герба в данной серии испытаний?
5. Отдел технического контроля обнаружил пять бракованных книг в

партии из случайно отобранных 100 книг. Найти относительную частоту появления бракованных книг.

6. При испытании партии приборов относительная частота годных приборов оказалась равной 0,9. Найти число годных приборов, если всего было проверено 200 приборов.

7. В магазине проведен учет спроса костюмов:

Размер	44	46	48	50	52	54
Спрос	90	148	532	585	455	183

Определить частость спроса в % 48 размера.

8. Некоторая фирма в течение времени провела опрос 1000 покупателей нового сорта напитка и 20 из них оценили его как вкусный. Оценить вероятность того, что потребителям понравится новый напиток.

9. На территории предприятия произошла авария водопровода. Общая длина водопровода L=150 м. В том числе 50 м трубы приходятся на труднодоступные места. Какова вероятность того, что ремонт придется производить именно на труднодоступном участке?

10. На плоскости начерчены две концентрические окружности, радиусы которых 5 и 10 см соответственно. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу в большой круг, попадет также и в кольцо, образованное построенными окружностями. Предполагается, что вероятность попадания точки в плоскую фигуру пропорциональна площади этой фигуры и не зависит от ее расположения.

11. В круг радиуса R помещен меньший круг радиуса r. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в большой круг, попадет также и в малый круг. Предполагается, что вероятность попадания точки в круг пропорциональна площади круга и не зависит от его расположения.

3 Условная вероятность. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Событием, *противоположным* событию A, называется событие $\bar{A}$, состоящее в ненаступлении события А.

Теорема 1. *Для любого события* А*вероятность противоположного события* $\bar{A}$ *выражается равенством*

$$P(\bar{A})=1- P(A)$$

Теорема 2. *Вероятность невозможного события равна нулю.*

Как отмечено выше, вероятность $P(B)$ как мера степени объективной возможности наступления события B имеет смысл при выполнении определенного комплекса условий. При изменении условий вероятность события B может измениться.

Определение 1. Вероятность события B, вычисленная при условии, что произошло некоторое событие A, называется ***условной вероятностью*** события B и обозначается $P_A(B)$

Пример. Для некоторой местности среднее число дождливых дней в августе равно 15. Какова вероятность того, что 2-го августа будет дождь?

$n = 31$

$m_д = 15$

I	II
$A - 1.08$ - дождь	$A - 1.08$ - ясно
B - 2.08 - дождь	B- 2.08 - дождь
$n = 30 \quad m_д = 14$	$n = 30 \; ; \; m_д = 15$
$P_A(B) = \frac{14}{30}$	$P_A(B) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$

Теорема умножения двух зависимых событий

Теорема 3. Вероятность совместного наступления двух зависимых событий A и B равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, в предположении, что первое событие уже произошло.

$$\boxed{P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B)} \qquad (10)$$

<u>*Следствие 1.*</u> Теорема (3) легко обобщается на случай произвольного числа событий

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) \cdot \ldots \cdot P_{A_1 \ldots A_{n-1}}(A_n)$$

При этом вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события произошли.

<u>*Следствие 2.*</u> Для любого из событий A и B справедливо равенство:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A),$$

т.е. теорема (3) обладает коммутативностью умножения $A \cdot B = B \cdot A$

Пример. См. условие предыдущей задачи. Какова вероятность того, что 1, 2, 3 августа будут дождливы?

A – 1.08. – дождь

B – 2.08. – дождь

C – 3.08. – дождь

$$P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{A \cdot B}(C)$$

$$P(A) = \frac{15}{31} \; ; \; P_A(B) = \frac{14}{30} \; ; \; P_{A \cdot B}(C) = \frac{13}{29}$$

$$P(A \cdot B \cdot C) = \frac{\cancel{15}}{31} \cdot \frac{\overset{7}{\cancel{14}}}{\underset{8}{\cancel{30}}} \cdot \frac{13}{29} = \frac{91}{899} = 0{,}1$$

Теорема умножения для независимых событий

Определение 2. Два события называются ***независимыми***, если появления одного из них не меняет вероятности наступления другого.

Пусть события A и B – независимы, тогда $P_A(B) = P(B)$

Теорема 4. Вероятность совместного наступления двух независимых событий A и B равна произведению вероятностей этих событий.

$$\boxed{P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)} \qquad (11)$$

Следствие. Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий.

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot ... \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$$

Пример. Имеется 3 ящика, содержащих по 10 деталей. В первом ящике 8, во втором 7 и в третьем 9 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу выбирают по одной детали. Какова вероятность того, что все три вынутые детали окажутся нестандартными?

A- нестандартная деталь из 1-го ящика	
B- -‖- -‖- -‖- 2-го ящика	независимые
C- -‖- -‖- -‖- 3-го ящика	

$$P(A) = \frac{2}{10} \quad ; \quad P(B) = \frac{3}{10} \quad ; \quad P(C) = \frac{1}{10}$$

$$P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,1 = 0,006$$

Теорема сложения вероятностей несовместных событий

Теорема 5. Вероятность наступления хотя бы одного из двух несовместных событий A или B равна сумме вероятностей этих событий.

$$\boxed{P(A + B) = P(A) + P(B)} \qquad (12)$$

Пример. В денежно-вещевой лотерее на каждые 10000 билетов разыгрывается 150 вещевых и 50 денежных выигрышей. Чему равна вероятность выигрыша?

$n = 10000$ | $C -$ выигрыш

$m_в = 150$ | $A -$ вещевой выигрыш | несовместные

$m_д = 50$ | $B -$ денежный выигрыш | несовместные

$P(C) - ?$ | $C = A + B$ (или вещевой, или денежный)

$$P(C) = P(A + B) = P(A) + P(B) = \frac{150}{10000} + \frac{50}{10000} = \frac{200}{10000} = 0,02$$

Следствие 1. Данная теорема справедлива для «***n***» несовместных событий.

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots \cdot + P(A_n)$$

Следствие 2. Сумма вероятностей событий, образующих полную систему, равна 1.

$$\boxed{P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_к)=1}$$

<u>Следствие 3</u>. Сумма вероятностей противоположных событий равна 1.

$$\boxed{P(A)+P(\overline{A})=1},$$

где $A-$данное событие, $\overline{A}-$противоположное событие.

Данное утверждение следует из того, что противоположные события образуют полную систему событий. Принято обозначать $P(A)=p;\ P(\overline{A})=q$. Следовательно $\boxed{p+q=1}$.

Пример. Если вероятность попадания в цель p=0,8, то вероятность промаха q= 0,2.

Теорема сложения для совместных событий.

Теорема 6. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления.

$$\boxed{P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)} \qquad (13)$$

В случае 3-х и более совместных событий формула будет очень громоздка. Так, для 3-х событий:

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

Поэтому проще перейти к противоположному событию и использовать формулу:

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_к)=1-P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot\ldots\cdot P(\overline{A_к}) \text{ или } \boxed{P(A)=1-q_1\cdot q_2\cdot q_3.....}.$$

Определение 3.Вероятность появления **<u>хотя бы одного</u>** из событий $A_1, A_2 ... A_к$, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\overline{A_1}$; $\overline{A_2}$ ... $\overline{A_к}$.

Частный случай. Если события $A_1, A_2 ... A_к$ имеют одинаковую вероятность, равную «**р**», то вероятность появления хотя бы одного из этих событий равна: $P(A)=1-q^k$

Пример. В типографии имеется 4 плоскопечатные машины. Для каждой машины вероятность того, что она работает в данный момент равна 0,9. Какова вероятность того, что в данный момент работает хотя бы одна машина (событие A).

$$\left.\begin{array}{c} p=0,9 \\ q=1-0,9=0,1 \\ \hline P(A)-? \end{array}\right| P(A)=1-q^4=1-(0,1)^4=1-0,0001=0,9999$$

<u>Замечание.</u> При использовании формулы (13) следует иметь в виду, что события A и B могут быть как независимыми, так и зависимыми.

Для независимых событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)$$

Для зависимых событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P_A(B)$$

Пример 1. Устройство содержит два независимо работающих элемента. Вероятность отказа 1-го из них – 0,05; 2-го-0,08. Какова вероятность того, что откажет все устройство, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент?

$P_1=P(A_1)=0,05$

$P_2=P(A_2)=0,08$

$P(A_1+A_2)-?$

$q_1=0,95$

$q_2=0,92$

A_1 *и* A_2 – совместные события, независимые

1) $P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1)\cdot P(A_2)=0,05+0,08-0,05\cdot 0,08=$
$=0,13-0,004=0,126$

2) $P(A_1+A_2)=1-q_1\cdot q_2=1-0,95\cdot 0,92=1-0,874=0,126$

Пример 2. На 100 лотерейных билетов приходится 5 выигрышных. Какова вероятность выигрыша хотя бы по одному билету, если приобретено 2.

$n=100$

$m=2$

A_1 – выиграл 1-й билет

A_2 – – ‖ – 2 – й билет

совместные, зависимые

$$P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)=\frac{5}{100}+\frac{5}{100}-\frac{5}{100}\cdot\frac{4}{99}=0,098$$

$\Rightarrow$ оба : 2 – ой билет выиграет, если выиграл 1-й

Вероятность появления только одного события

Пусть вероятности появления каждого из двух независимых событий A_1 и A_2 соответственно равны p_1 и p_2. Найдем вероятность появления только одного из этих событий. Введем обозначения событий:

B_1 – появилось только событие A_1;

B_2 – появилось только событие A_2.

Появление события B_1 равносильно появлению события $A_1\cdot\overline{A_2}$ (появилось первое событие и не появилось второе), т.е. $B_1=A_1\cdot\overline{A_2}$

Появление события B_2 равносильно появлению события $\overline{A_1}\cdot A_2$ (появилось второе событие и не появилось первое), т.е. $B_2=\overline{A_1}\cdot A_2$

Таким образом, чтобы найти вероятность появления только одного из событий A_1 и A_2, достаточно найти вероятность появления одного, безразлично какого, из событий B_1 и B_2. События B_1 и B_2 несовместны, поэтому применима теорема сложения:

$$P(B_1 + B_2) = P(B_1) + P(B_2) \qquad (*)$$

Найдем вероятности каждого из событий B_1 и B_2. События A_1 и A_2 независимы, следовательно, независимы события A_1 и $\overline{A_2}$, а также $\overline{A_1}$ и A_2, поэтому применима теорема умножения:

$$P(B_1) = P(A_1 \cdot \overline{A_2}) = P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) = p_1 \cdot q_2$$

$$P(B_2) = P(\overline{A_1} \cdot A_2) = P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) = q_1 \cdot p_2$$

Подставим эти вероятности в соотношение (*) и найдем искомую **вероятность появления только одного из событий** A_1 и A_2:

$$\boxed{P(B_1 + B_2) = p_1 \cdot q_2 + q_1 \cdot p_2}$$

Пример. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для 1-го стрелка = 0,7, для 2-го = 0,8. Какова вероятность того, что при одном залпе в мишень попадет только один стрелок.

$p_1 = 0,7$

$p_2 = 0,8$

$q_1 = 0,3$

$q_2 = 0,2$

$P(B_1 + B_2) - ?$

$P(B_1 + B_2) = p_1 \cdot q_2 + q_1 \cdot p_2 = 0,7 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,8 = 0,14 + 0,24 = 0,38$

Задачи для самостоятельного решения

1. Из участников танцевального кружка, состоящего из 8 девушек и 4 юношей, выбирают 9 человек для определенного танца. Найти вероятность того, что среди участников окажутся все юноши?
2. В урне 8 красных и 6 голубых шаров. Из урны последовательно без возвращения извлекается 3 шара. Найти вероятность, что все 3 шара голубые.
3. Бросаются две игральные кости. Какова вероятность появления хотя бы одной шестерки?
4. Вероятность того, что приобретенный товар произведен в Италии, равна 0,4, а того, что он произведен в Турции – 0,3. Какова вероятность того, что товар произведен в одной из этих стран?
5. Рабочий обслуживает три станка, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует внимания рабочего, для первого станка равна 0,9, для второго – 0,8, для третьего – 0,7. Найти: 1) вероятность того, что в течение часа ни один из трех станков не

потребует внимания рабочего; 2) вероятность того, что в течение часа по крайней мере один из станков не потребует внимания рабочего.

6. Вероятность летной погоды равна 0,9, а вероятность того, что при условии летной погоды груз будет доставлен своевременно – 0,8. Какова вероятность того, что груз будет доставлен своевременно?

7. Исследователь разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятность того, что формула окажется в первом справочнике, равна 0,6, во втором – 0,7, в третьем – 0,8. Какова вероятность того, что формула окажется:

а) только в одном справочнике;

б) только в двух справочниках;

в) во всех трех справочниках;

г) хотя бы в одном справочнике;

д) ни в одном справочнике;

е) хотя бы в двух справочниках;

ж) только в первом справочнике;

з) только во втором справочнике;

и) не менее чем в двух энциклопедиях.

8. В партии из 50 деталей имеется 10 бракованных. Какова вероятность того, что среди наудачу отобранных 20 деталей окажется 3 бракованных?

9. Прокуратура проверяет деятельность одного частного предпринимателя, который владеет тремя магазинами. Проверка проводится одним проверяющим в одном произвольно выбранном магазине. Вероятность выявить нарушения в первом магазине равна 0,1, во втором – 0,3, в третьем – 0,25. Какова вероятность того, что нарушения будут выявлены:

а) только в одном магазине; б) только в двух магазинах; в) во всех трех магазинах; г) хотя бы в одном магазине; д) ни в одном магазине; е) хотя бы в двух магазинах; ж) только в первом магазине; з) только во втором магазине; и) не менее чем в двух магазинах.